

# 모델차수축소법을 이용한 너클의 효율적인 진동해석

한정삼<sup>†</sup> · 에브게니 루디니<sup>\*</sup> · 얀 코빙크<sup>\*</sup>

## Efficient Vibrational Simulation of a Knuckle Using Model Order Reduction

Jeong Sam Han, Evgenii B. Rudnyi and Jan G. Korvink

**Key Words :** Model Order Reduction(모델차수축소법), Krylov Subspace(크리로프 부공간), Arnoldi Process(아놀디 과정), Moment-Matching Method(모멘트 일치법), Knuckle(너클)

### Abstract

Currently most practical vibrational and structural problems in automotive suspensions require the use of the finite element method to obtain their structural responses. When the finite element model has a very large number of degrees of freedom, the harmonic and dynamic analyses are computationally too expensive to repeat within a feasible design process time. To alleviate the computational difficulty, this paper presents a moment-matching based model order reduction (MOR) which reduces the number of degrees of freedom of the original finite element model and speeds up the necessary simulations with the reduced-size models. The moment-matching model reduction via the Arnoldi process is performed directly to ANSYS finite element models by software mor4ansys. Among automotive suspension components, a knuckle is taken as an example to demonstrate the advantages of this approach for vibrational simulation.

### 1. 서 론

근래에는 자동차의 현가장치나 각종 부품의 진동 및 변형 특성을 얻기 위하여 많은 경우에 유한요소법을 이용한다. 최근에는 컴퓨터 하드웨어가 많이 발전하여 합리적인 시간에 대형 문제의 구조해석이 가능하지만 큰 자유도를 가진 모델의 주파수 응답해석 및 진동해석 등의 유한요소해석을 주어진 설계시간 내에 반복적으로 수행하기에는 여전히 시간적 어려움이 많은 형편이다. 따라서, 컴퓨터 하드웨어의 발전과 더불어 이러한 해석적 어려움을 해결하려는 수치해석적 방법의 연구가 절실히 요구되는 실정이다.

대형 선형 시스템의 모델축소법(model reduction)

에 대해서는 이미 수학계에서 상당한 연구가 이루어지고 있다.<sup>(1)</sup> 근래에는 공학적 응용으로서 각종 회로 해석<sup>(2)</sup>, 미소기전시스템(MEMS)의 동적 해석<sup>(3)</sup>이나 열 해석 문제<sup>(4)</sup> 등에 모델차수축소법(model order reduction)이 점차 활용되고 있다. 특히, 많은 부시스템들이 배열 형태로 구성된 미소기전시스템의 경우에는 전체 시스템 규모의 해석은 시간상 거의 불가능하므로 각각의 부시스템 모델의 차수를 축소하여 이 축소모델을 이용함으로써 전체 시스템 규모의 해석을 가능하게 할 수 있다. 이와 유사하게 자동차 현가장치의 동적 해석에도 부품 각각의 해석모델을 그대로 해석에 이용하는 것보다 그 모델의 차수를 축소하여 해석을 수행하는 것이 보다 효율적이다.

본 논문에서는 이러한 접근방법의 한가지로 모멘트 일치법(moment-matching method)을 통한 모델 축소법을 설명하고, 아놀디 과정(Arnoldi process)을 이용하여 실제로 ANSYS 유한요소모델에서 축소 모델을 생성하는 프로그램인 mor4ansys를 소개한다. 또한, 현가장치 부품인 너클에 모델차수축소법을 적용한 결과를 일반적인 해석방법과 비교 검토

<sup>†</sup> 안동대학교 기계공학부  
E-mail : jshan@andong.ac.kr  
TEL : (054)820-6218 FAX : (054)820-5167

<sup>\*</sup> Institute for Microsystem Technology Simulation lab.  
E-mail : rudnyi@imtek.de, korvink@imtek.de

하여 모델축소법의 유용성과 장점을 보이고자 한다.

## 2. 이론

### 2.1 모델차수축소법

일반적으로 구조물의 진동해석을 위한 운동방정식을 유한요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서,  $t$ 는 시간변수,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$ 은 상태변수벡터,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ 은 입력하중벡터, 그리고  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$ 는 출력벡터를 의미한다. 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 차수는  $N$ , 입력하중벡터와 출력벡터의 차수는 각각  $m$ 과  $p$ 이다. 행렬  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 는 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이다. 행렬  $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{N \times m}$ 와  $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{N \times p}$ 은 각각 입력분배행렬과 특정한 부분에서의 출력을 위한 출력측정행렬을 의미한다. 실제 문제에서  $m$ 과  $p$ 는  $N$ 보다 훨씬 작은 경우가 대부분이다.

모델차수축소법의 기본 개념은 식(2)의 관계를 만족하는 부공간  $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{N \times n}$ 을 구함으로써, 초기의 높은 차수의 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 부공간  $\mathbf{V}$ 를 통하여 낮은 차수의 벡터  $\mathbf{z}(t)$ 로 근사화 하는 것이다.

$$\mathbf{x}(t) \cong \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^n, \quad n \ll N \quad (2)$$

일단, 부공간  $\mathbf{V}$ 를 구한 후에 초기 상미분방정식을  $\mathbf{V}$ 에 투영(projection)시키면 식(1)은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{B}_r \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r^T \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

위에서 축소행렬은  $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{B}$  및  $\mathbf{L}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{L}$ 로 각각 표현된다. 참고로 축소모델의 차수는  $n \ll N$ 이고, 입력하중벡터  $\mathbf{u}(t)$ 와 출력벡터  $\mathbf{y}(t)$ 의 차수는 초기와 그대로임을 알 수 있다. 따라서, 차수  $n$ 으로 축소된 모델을 해석에 이용하므로 매우 효율적으로 해석을 수행할 수 있다.

기계공학에서 구조물의 해석에는 일종의 근사화 방법으로 몇 개의 고유 진동모드를 구하여 이를 선형 결합하여 주파수 및 과도 응답을 계산하는 모드중첩법(mode superposition method)<sup>(6)</sup>이 많이 활용된다. 이 방법은 비교적 계산량이 적어 계산 시간이 빠른 반면에 이용되는 진동모드의 개수를 결정하는 것이 사용자 직관에 달려있고, 진동모드

의 개수에 따른 응답의 정량적인 차이를 예측할 수 없는 단점이 있다.

본 논문에서는 식(2)의 부공간  $\mathbf{V}$ 를 크리로프 부공간(Krylov subspace)을 이용하여 선택함으로써 식(1)과 식(3)의 시스템의 모멘트(moment)가 서로 일치되도록 하였다. 이 방법은 모드중첩법에 비하여 우수한 오차 예측 특성을 가진다. 다음 절에서는 모멘트 일치법을 이용한 모델차수축소법에 대하여 설명한다.

### 2.2 질량 및 강성행렬의 축소법

식(1)을 라플라스 변환(Laplace transformation)하고, 그 전달함수를 구하면

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s) = \mathbf{L}^T (s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \quad (4)$$

이며, 여기서 감쇠행렬을 무시하고  $s=0$ 에 대하여 테일러 급수 전개를 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{L}^T (s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathbf{L}^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} s^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i s^{2i} \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 계수  $\mathbf{m}_i = (-1)^i \mathbf{L}^T (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}$ 를 전달함수  $\mathbf{H}(s)$ 의 모멘트라고 한다.

비감쇠 동적 시스템의 모멘트 일치법에 따르면, 투영행렬  $\mathbf{V}$ 가 다음과 같이 정의되는  $q$ 차의 크리로프 부공간으로부터 얻어지면, 축소모델의 모멘트는 초기모델의 모멘트와 첫  $q+1$  모멘트까지 일치한다는 사실이 알려져 있다.<sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}) \\ = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}, (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}, \dots, (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M})^{q-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}\} \end{aligned} \quad (6)$$

실제 수치적으로, 투영행렬  $\mathbf{V}$ 는 아놀디 과정<sup>(2)</sup>을 통해 계산되며 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

$$\begin{aligned} \text{colspan}(\mathbf{V}) &= \mathcal{K}_q(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V} &= \mathbf{H}_q \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_q \end{aligned} \quad (7)$$

### 2.3 감쇠행렬의 축소법

구조해석에서 감쇠행렬을 질량 및 강성행렬의 선형 결합으로 표현하는 레일리(Rayleigh) 감쇠를 흔히 사용한다. 이 때에 감쇠행렬은

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (8)$$

로 표현되며, 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각  $s^{-1}$ 과  $s$ 의 단위를 가진다. 이 경우에 투영행렬  $\mathbf{V}$ 를 이용하면 축소된 감쇠행렬은

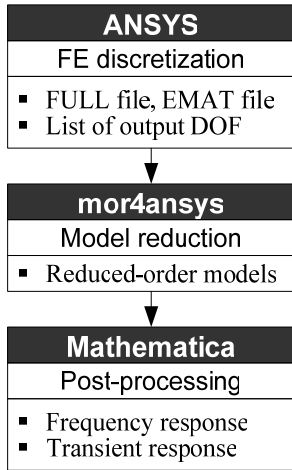


Fig. 1 Process of model order reduction

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_r &= \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \\
 &= \mathbf{V}^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \mathbf{V} \\
 &= \alpha \mathbf{M}_r + \beta \mathbf{K}_r
 \end{aligned} \tag{9}$$

로 표현되어,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 축소모델에서도 매개변수로 남게 된다. 이러한 방법은 투영행렬  $\mathbf{V}$ 를 찾는 데, 질량 및 강성행렬이 감쇠행렬보다 상대적으로 더 중요하다는 가정에 근거하였다.

### 3. 모델 차수 축소법의 구현

이 장에서는 앞 장에서 설명한 모델 차수 축소법을 실제로 수행하는 소프트웨어인 mor4ansys를 소개하고, 초기의 ANSYS 모델에 모델 차수 축소법을 적용하여 최종 주파수 응답을 구하는 전체 과정을 설명한다 (Fig. 1 참고).

모델 차수 축소법 소프트웨어인 mor4ansys는 크게 두 부분으로 나뉘는데, 첫째 부분은 ANSYS 모델을 읽어서 그 정보를 식(1)의 형태로 구성한다. ANSYS 모델을 추출할 때는 이진(binary) 형태로 되어 있는 ANSYS의 FULL 파일과 EMAT 파일을 읽어 그 정보를 식(1)의 형태로 구성하게 된다. 둘째 부분은 식(1)에 아놀디 과정을 적용하여 식(2)의 투영행렬  $\mathbf{V}$ 를 생성한다. 이 경우에 추가적으로, 출력하고자 하는 절점과 자유도 정보를 지정하여야 한다.<sup>(3)</sup>

축소모델은 Matrix Market 형태의 행렬로 출력되며, Mathematica를 이용하여 축소모델에 대한 주파수 응답과 과도 응답 등을 계산한다. 축소모델은 그 차수가  $n$ 이고, 초기모델의 차수  $N$ 보다 매우 작기 때문에 효율적으로 주파수 응답과 과도 응답을 계산할 수 있다.



Fig. 2 Knuckle



Fig. 3 FE mesh for the knuckle

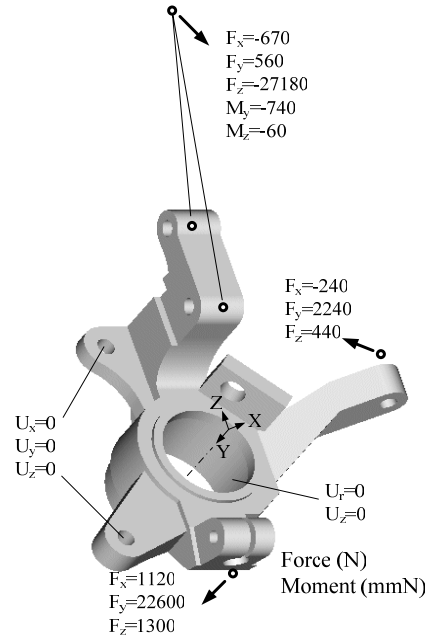
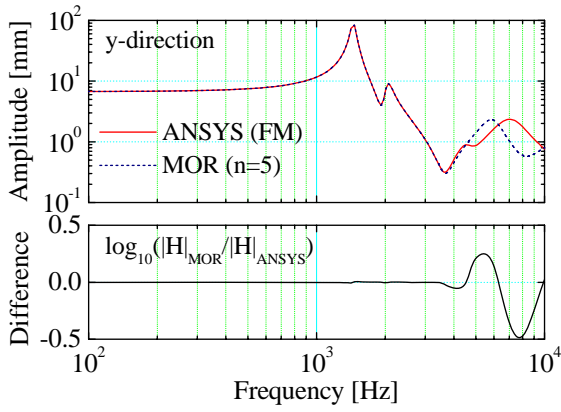


Fig. 4 Loading and boundary conditions

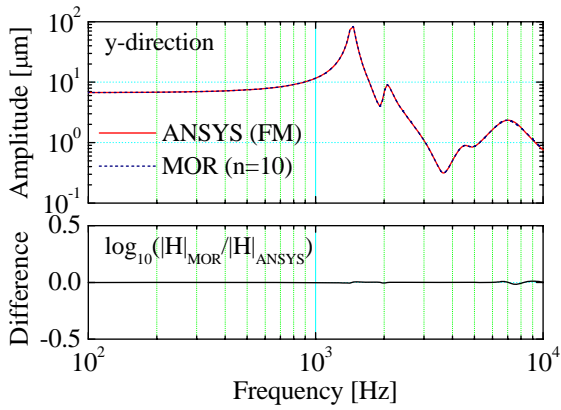
## 4. 너클의 진동해석

### 4.1 모델링

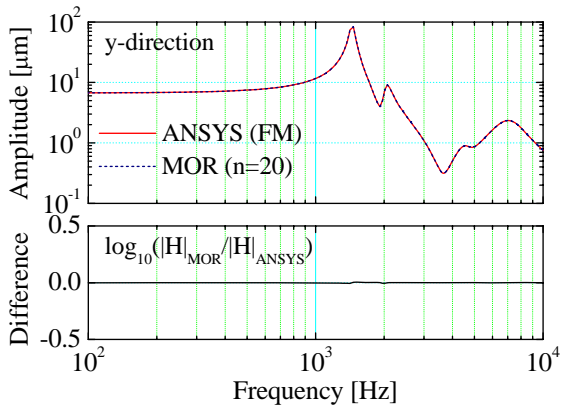
너클은 자동차 현가장치의 부품으로 댐퍼, 로어 컨트롤암, 타이로드, 브레이크 등과 연결되며, 구동축을 지지하는 역할을 한다. 타이어를 통해 지면에서 전달되는 하중은 전적으로 너클을 통해 차



(a)



(b)

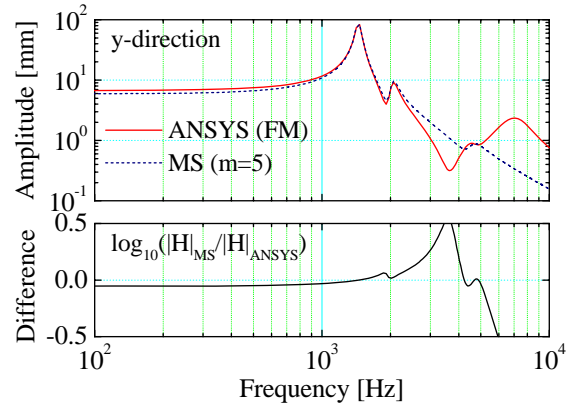


(c)

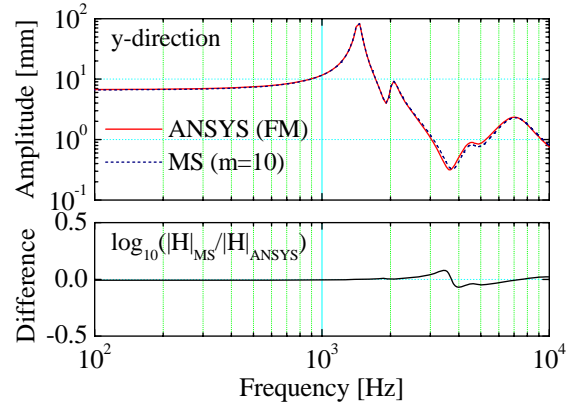
**Fig. 5** Frequency response using model order reduction: (a)  $n=5$ ; (b)  $n=10$ ; (c)  $n=20$

체로 전달되며, 조향도 타이로드를 통해 너클을 킹핀 축 중심으로 회전시켜 이루어진다 (Fig. 2).

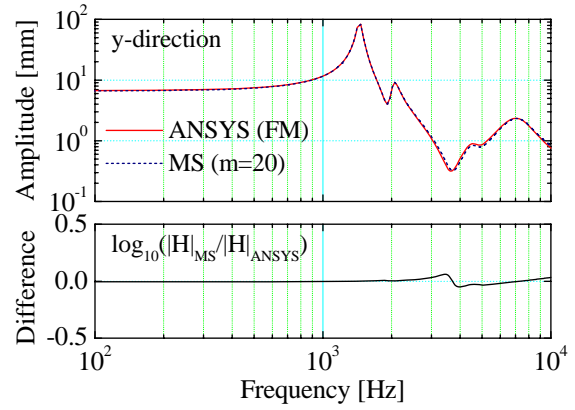
Fig. 3의 유한요소모델은 ANSYS의 SOLID45로 구성되며, 너클과 댐퍼가 연결되는 부위, 타이로드 연결 부위, 로어콘트롤암 연결 부위 등은 강성 부분을 정의하는 CERIG를 이용하여 모델링 되었다. 경계조건으로 너클의 중심 부위를 원통 좌표계를 사용하여 축방향과 반경방향의 자유도를 구속하였으며, 브레이크의 제동 효과를 고려하여 브레이크 연결 부위의 자유도를 구속하였다. 하중조건은 Fig. 4와 같이 "lateral curb strike mode"를 가정하였



(a)



(b)



(c)

**Fig. 6** Frequency response using mode superposition method: (a)  $m=5$ ; (b)  $m=10$ ; (c)  $m=20$

다. 재료의 물성치는 탄성계수가 200 GPa, 포아송비가 0.29, 밀도가 7850 kg/m<sup>3</sup>로 하였다.

#### 4.2 주파수 응답해석

위에서 설명한 너클 모델에 대하여 모델차축소법과 모드중첩법을 이용하여 주파수 응답해석을 수행하였다. Fig. 3의 ANSYS 유한요소모델은 각 절점당 3개의 자유도(degrees of freedom)를 가지는 요소 39360개, 절점 9501개로 구성되어 있다. 주파수 응답해석에서 감쇠는 레일라이 감쇠를 이용하였는데  $\alpha=0$ 로 하고,  $f=1000$  Hz에서  $\xi=2$  %의 감쇠

를 가정하여

$$\beta = \xi / \pi f \quad (10)$$

의 관계에서  $\beta = 6.36 \mu s$ 로 설정하였다.

Fig. 5는 모델차수축소법을 통하여 초기의 유한 요소모델에서 축소모델을 생성한 후, 축소모델을 이용하여 주파수 응답해석을 수행한 결과를 축소 모델 차수에 따라서 나타내었다. ANSYS에서 제공하는 주파수 응답해석방법 중에서 계산량은 많지만 가장 정확한 full method(FM)를 기준으로 두 방법의 결과를 비교하였다. 이 너클 모델은 약 1500 Hz에서 응답의 피크값이 발생하였다.

먼저 축소모델의 차수가  $n=5$ 인 경우는 약 4000 Hz까지 결과가 오차 없이 잘 일치함을 알 수 있다. 축소모델의 차수를  $n=10, 20$ 으로 점점 크게 함으로써 좀더 고주파수 영역까지 오차가 줄어들음을 확인할 수 있다. 이 결과는 테일러 급수 전개점에서부터 관심 주파수 영역이 멀어지면 축소모델과 초기모델 사이의 오차가 커지는 모멘트 일치법의 특징을 잘 보여주고 있다.

이에 반하여 Fig. 6은 ANSYS의 모드중첩법(MS)을 이용하여 계산한 주파수 응답의 결과를 나타낸다. 주파수 응답해석에 사용된 총 모드수  $m=5, 10, 20$ 에 대하여 그 결과를 도시하였다. 모드수가 5인 경우는 피크값 부근에서는 오차가 적으나, 저주파수 영역과 고주파수 영역에서 비교적 큰 오차가 발생함을 알 수 있다. 모드수를  $m=10$ 에서 20으로 증가하여 더 많은 진동모드를 주파수 응답해석에 고려하여도 주파수 응답 결과는 거의 향상되지 않음을 확인할 수 있다. 뿐만 아니라, 오차가 경향성을 가지지 않기 때문에 적절한 모드수  $m$ 을 선정하기가 까다로운 점이 있다.

## 5. 고찰

Table 1에는 각각의 방법에 따른 주파수 응답해석 시간을 나타내었다. ANSYS의 full method에 이용된 유한요소모델의 총 자유도(DOF)는 26328개이다. 모델차수축소법의 축소모델 차수  $n=5, 10, 20$ 과 ANSYS의 모드중첩법에서 고려된 모드수  $m=5, 10, 20$ 의 경우를 비교하였다. 모델차수축소법을 이용하여 주파수 응답을 구하는 경우에 필요한 계산 시간은 1) ANSYS에서 FULL과 EMAT 파일을 생성하는데 소요되는 시간, 2) mor4ansys에서 투영행렬  $V$ 의 열벡터를 구하는 시간, 3) Mathematica에서 축소모델을 이용하여 주파수 응답을 계산하는 시간 등으로 구분되므로, 각 단계에서 소요되는 시간을 각각 표시하였다. 참고로 해석에 사용된 컴퓨터는

Table 1 Computational times in seconds

Computational time for	Full ANSYS	MOR (n)			MS (m)		
		5	10	20	5	10	20
ANSYS	16960	410	410	410	750	780	810
mor4ansys	-	25	26	28	-	-	-
Mathematica	-	1	1	2	-	-	-
Total time	16960	436	437	440	750	780	810

Intel Pentium 4-M CPU 2.40 GHz로 RAM을 1 GB를 장착한 노트북 컴퓨터이다.

ANSYS의 full method를 이용하는 경우, 총 해석 시간이 16960 s가 소요되었으며, 모델차수축소법을 이용한 경우에는 모든 과정을 다 고려한 경우, 약 440 s 정도가 소요되었다. 또한, ANSYS의 모드중첩법을 사용한 경우는 약 800 s 정도가 소요되어서, 계산 시간 측면에서도 모델차수축소법이 모드중첩법보다 더 효율적임을 확인할 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 모멘트 일치법에 근거한 모델차수축소법을 너클의 주파수 응답해석에 적용하여 정확한 해석 결과와 함께 필요한 해석 시간을 대폭 감소시킬 수 있음을 제시하였다. 특히, 모델차수축소법을 주파수 응답이나 동적 응답을 필요로 하는 최적설계에 활용한다면 최적설계에서의 반복 해석의 특성상 계산 시간 측면에서의 모델차수축소법의 효과는 더욱 증가할 것이다.

## 참고문헌

- (1) Rudnyi, E.B. and Korvink, J.G., 2002, "Automatic model reduction for transient simulation of MEMS-based devices," *Sensors Update*, Vol. 11, pp. 3~33
- (2) Freund, R.W., 2000, "Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 395~421
- (3) Han, J.S., Rudnyi, E.B. and Korvink, J.G., "Efficient optimization of transient dynamic problems in MEMS devices using model order reduction," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 822~832
- (4) Yang, Y.J. and Yu, C.C., 2004, "Extraction of heat-transfer macromodels for MEMS devices," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 14, pp. 587~596
- (5) Su, T.J. and Craig, Jr. R.R., 1991, "Krylov model reduction algorithm for undamped structural dynamics systems," *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 14, pp. 1311~1313
- (6) ANSYS, 2003, *ANSYS Theory Reference 7.1*, (ANSYS Inc)